Propriétés de géométrie plane vues au collège

Théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore : Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Contraposée du théorème de Pythagore : Si le carré de la longueur du côté le plus long d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore (admis) : Si dans un triangle, le carré de la longueur du côté le plus long est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et ce côté son hypoténuse.

Propriété des milieux

1. Propriété : Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté. De plus, la longueur du segment qui joint ces deux milieux est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

2. Propriété (réciproque) : Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Théorème de Thalès

1. Théorème de Thalès : Soit *d* et *d'* deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de la droite *d*, distincts de A, et N et C deux points de la droite *d'* distincts de A.

Si (MN)//(BC) alors on a l'égalité des trois rapports suivants :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

2. Réciproque du théorème de Thalès : Soit *d* et *d'* deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de la droite *d*, distincts de A, et N et C deux points de la droite *d'* distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, M, B sont alignés dans le même ordre que les points A, N, C alors (MN)//(BC)

Cercles

Définition du cercle : Un cercle est l'ensemble des points du plan à une distance donnée (appelée le rayon), d'un point donné (appelé le centre).

Autrement dit : Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que OM = R.

Définition d'une corde : Un segment dont les extrémités sont sur un cercle est une corde de ce cercle.

Définition du diamètre : Un diamètre d'un cercle est une corde qui passe par le centre du cercle.

Remarque : Le rayon et le diamètre peuvent avoir deux significations : un segment ou une longueur.

Propriétés :

- Tous les diamètres d'un cercle sont de même longueur (égale au double du rayon).
- Le centre du cercle est le milieu de ses diamètres.

Triangle et cercle

Propriété : Si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est un triangle rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Autres formulations :

- Un diamètre d'un cercle forme avec un point quelconque de ce cercle, distinct des extrémités de ce diamètre, un triangle rectangle et ce diamètre est son hypoténuse.

- Si l'un des côtés d'un triangle a pour milieu le centre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Propriété (réciproque) : L'hypoténuse d'un triangle rectangle est un diamètre de son cercle circonscrit.

Autre formulation : Dans un triangle rectangle, le milieu de son hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.

Propriété : Si la longueur de la médiane relative au côté le plus long d'un triangle est égale à la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Propriété (réciproque) : La longueur de la médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Distance d'un point à une droite

1. Définition : La distance d'un point à une droite est la plus petite distance de ce point à l'un quelconque des points de cette droite.

2. Propriété : La distance du point A à la droite d est la distance AH avec H le pied de la perpendiculaire à d passant par A.

Tangente à un cercle

Définition : Une droite est tangente à un cercle lorsqu'elle coupe le cercle en un unique point (appelé le point de contact).

Propriété : La tangente à un cercle en un point donné est perpendiculaire au rayon ayant pour extrémité ce point.

Propriété réciproque : Si une droite est perpendiculaire à un rayon d'un cercle en un point du cercle alors c'est la tangente à ce cercle en ce point.

Droites remarquables dans un triangle

I. Médiatrices et centre du cercle circonscrit.

1. Médiatrice d'un segment

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe perpendiculairement ce segment en sont milieu.

Propriété : Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

Propriété : Tout point équidistant des extrémités d'un segment est sur la médiatrice de ce segment.

2. Médiatrices d'un triangle

Définition : Dans un triangle, une droite qui coupe perpendiculairement un côté en son milieu est une médiatrice de ce triangle.

Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre de son cercle circonscrit.

II. Médianes et centre de gravité

Définition: Dans un triangle, une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé est une médiane de ce triangle.

Propriété : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé le centre de gravité.

De plus, si G est le centre de gravité de ABC et I le milieu de $[BC]$, on a :

$$AG = \frac{2}{3} AI \text{ (ou encore } IG = \frac{1}{3} AI \text{ ou } AG = 2IG, \text{ etc…)}$$

Remarque : Une médiane est parfois considérée comme un segment reliant un sommet et le milieu du côté opposé. On peut alors résumer l'égalité précédente par : « le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane (à partir du sommet) ».

Propriété : Si un point est situé aux deux tiers de la médiane à partir du sommet d'un triangle alors ce point est le centre de gravité de ce triangle.

III. Hauteurs et orthocentre

Définition : Dans un triangle, une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé est une hauteur de ce triangle.

Propriété : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé l'orthocentre.

Remarque : Une hauteur est parfois considérée comme un segment reliant un sommet et le point d'intersection de la hauteur avec le côté opposé. Ce point est appelé le pied de la hauteur.

Une hauteur peut aussi être considérée comme la longueur de ce segment, souvent notée h.

Propriété : L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la longueur d'un côté par longueur de la hauteur relative à ce côté.

$$\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$$

Remarque : Puisqu'il y a trois hauteurs dans un triangle, il y a trois façons de calculer l'aire d'un triangle.

IV. Bissectrices et centre du cercle inscrit

1. Bissectrice d'un angle

Définition : La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

Propriété : La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

Propriété : Tout point sur la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.

Propriété réciproque : Tout point équidistant des côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle.

2. Bissectrices d'un triangle

Définition : Une bissectrice d'un triangle est une droite qui partage un angle de ce triangle en deux angles de même mesure.

Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes au centre de son cercle inscrit. (Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle).

V. Cas particuliers : le triangle isocèle et le triangle équilatéral

a) Le triangle isocèle.

Propriété : La hauteur, la médiane et la bissectrice issues du sommet d'un triangle isocèle sont confondues avec la médiatrice de la base. Cette droite est l'axe de symétrie du triangle isocèle.

b) le triangle équilatéral.

Propriété : Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie qui sont à la fois hauteur, médiane, bissectrice et médiatrice.

Conséquence : Dans un triangle équilatéral, les centres des cercles circonscrit et inscrit, le centre de gravité et l'orthocentre sont confondus. Attention : un triangle n'a pas de centre de symétrie.

Droites parallèles et perpendiculaires

Propriété : Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Propriété : Si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Propriété : Si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

Propriété : Si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Symétrie axiale

Définition : Soit D une droite donnée (l'axe de symétrie). Le symétrique d'un point quelconque du plan et son symétrique par rapport à D sont les extrémités d'un segment dont la médiatrice est D.

Propriétés : La symétrie centrale conserve :

- le parallélisme
- l'alignement
- les distances
- les mesures d'angles
- les mesures d'aires

Elle transforme un cercle en un cercle de même rayon.
L'ensemble des points invariants est l'axe de symétrie.
Toutes les droites perpendiculaires à l'axe sont globalement invariantes.

Symétrie centrale

Définition Soit O un point donné (le centre de symétrie). Le symétrique d'un point quelconque du plan et son symétrique par rapport à O sont les extrémités d'un segment de milieu O.

Propriétés : La symétrie centrale conserve :

- le parallélisme
- l'alignement
- les distances
- les mesures d'angles
- les mesures d'aire

Elle transforme une droite en une droite parallèle. Un cercle en un cercle de même rayon.
Toutes les droites passant par le centre de symétrie sont globalement invariantes.

Angles et triangles

1. Couples d'angles

Définitions :
● Deux angles sont adjacents s'ils ont un côté et leur sommet en commun et qu'ils sont de part et d'autre du côté commun.
● Deux angles sont complémentaires si leur somme est égale à 90°.
● Deux angles sont supplémentaires si leur somme est égale à 180°.

Propriétés :
● Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.
● Deux angles alternes internes formés par une sécante et deux droites parallèles sont de même mesure.
● Réciproquement : Si deux angles alternes internes sont de même mesure alors ils sont formés par une sécante et deux droites parallèles.
● Contraposée : Si deux angles alternes internes sont formés par une sécante et deux droites qui ne sont pas parallèles alors ils ne sont pas de même mesure.

- Deux angles correspondants formés par une sécante et deux droites parallèles sont de même mesure.
- Réciproquement : Si deux angles correspondants sont de même mesure alors ils sont formés par une sécante et deux droites parallèles.
- Contraposée : Si deux angles correspondants sont formés par une sécante et deux droites qui ne sont pas parallèles alors ils ne sont pas de même mesure.

2. Angles dans un triangle

Propriété : La somme des angles dans un triangle est égale à 180°.

Propriété : Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure.

Propriété réciproque : Si un triangle a deux angles de même mesure, alors c'est un triangle isocèle.

Propriété : Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

Propriété : Un triangle équilatéral a trois angles de même mesure, égaux chacun à 60°.

Propriété réciproque : Si un triangle a trois angles de même mesure alors c'est un triangle équilatéral.

Angles et cercle

Définition : un angle inscrit est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux autres points. On dit que l'angle inscrit intercepte l'arc d'extrémité ces deux points.
L'angle au centre associé intercepte le même arc et a pour sommet le centre du cercle.

Propriété : Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont de même mesure.

Propriété : Un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'angle au centre associé.

Inégalité triangulaire et segment

Propriété : Si A, B et C sont trois points du plan alors $AB \leq AC + CB$

Cette inégalité est appelée l'inégalité triangulaire.

Propriété caractéristique d'un segment : $C \in [AB]$ si et seulement si $AB = AC + CB$

Conséquence : Si $AB \neq AC + CB$ alors $C \notin [AB]$

Parallélogramme

Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Programme de construction du parallélogramme ABCD :

- Tracer deux segments consécutifs qui représentent [AB] et [AD].
- Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon [AD].
- Tracer un arc de cercle de centre D et de rayon [AB].
- A l'intersection des deux arcs de cercle on obtient le point C.
- Tracer les segments [AC] et [BC].

Propriétés :

- Un parallélogramme admet un centre de symétrie à l'intersection de ses diagonales.
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.
- Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure.
- Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont deux à deux supplémentaires.

Propriétés réciproques

Les propriétés suivantes permettent de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme :

- Si un quadrilatère admet un centre de symétrie alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.
(Cette propriété justifie la construction du parallélogramme)
- Si un quadrilatère a ses angles opposés de même mesure alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses angles consécutifs deux à deux supplémentaires alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Propriété : L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la longueur d'un côté par la hauteur relative à ce côté. Si *b* est la longueur d'un côté et *h* la hauteur relative à ce côté alors $A_{ABCD} = b \times h$

Remarque : Il existe deux façons de calculer l'aire d'un parallélogramme puisqu'il y a deux hauteurs possibles.

Quadrilatères particuliers

1. Le trapèze

Définition : Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles, appelés ses bases.
Si de plus il a ses deux autres côtés de même longueur, c'est un trapèze isocèle.

Définition : Un trapèze qui a un angle droit est un trapèze rectangle.

2. Le rectangle

Définition : Un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle.

Propriété : Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.

Propriété : Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.

Propriété : Un rectangle a ses diagonales de même longueur.

Propriété réciproque : Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

Propriété : Un rectangle a deux axes de symétrie qui sont ses médianes (les médiatrices des côtés).

Propriété réciproque : Si un quadrilatère a deux axes de symétrie qui sont les médiatrices de ses côtés alors c'est un rectangle

3. Le losange

Définition : Un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur est un losange.

Propriété : Si parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Propriété : Un losange a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement.

Propriété réciproque : Si un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement alors c'est un losange.

Propriété : Un losange a deux axes de symétrie qui sont les supports de ses diagonales.

Propriété réciproque : Si un quadrilatère a deux axes de symétrie qui sont les supports de ses diagonales alors c'est un losange.

4. **Le carré**

Définition : Un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits est un carré.
Propriété : Un carré est à la fois un losange et un rectangle.

Trigonométrie

Définition : Soit deux droites d et d', sécantes en O et formant un angle aigu $\hat{a}$. Soit A un point de d et H le pied de la perpendiculaire à d', passant par A.

Le rapport $\frac{OH}{OA}$ ne dépend pas de la position du point A sur la droite d', il dépend uniquement de la mesure de l'angle $\hat{a}$.

Par définition, ce rapport est appelé le cosinus de l'angle $\hat{a}$.

Notation : le cosinus de l'angle $\hat{a}$ se note $\cos(\hat{a})$ ou $\cos\hat{a}$ donc : $\boxed{\cos(\hat{a}) = \frac{OH}{OA}}$

Propriété : Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport de la longueur du côté adjacent à l'angle sur la longueur de l'hypoténuse.

Remarque : le cosinus étant un rapport de deux longueur, il n'a pas d'unité.

Propriété : Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport de la longueur du côté apposé à l'angle sur la longueur de l'hypoténuse. Notation : $\sin(\hat{a})$

Propriété : Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au rapport de la longueur du côté opposé à l'angle sur la longueur du côté adjacent. Notation : $\tan(\hat{a})$.